*我唯一所知的就是我的无知*

*——Socrates*

最著名的“说谎者悖论”（liar paradox）：

**“我这句话是真的当且仅当我是假的”**

*Remark1.设想一下匹诺曹说了这句话的话会如何呢？*

它的另一种形式是“埃皮门尼德是一个克里特人，他说过一句不朽的话：“所有克里特人都只说假话”。”

（这后来在Smullyan手中衍生出了许多有趣的逻辑谜题，例如著名的“骑士与无赖”场景：骑士只说真话，无赖只说假话，但你不知道谁是骑士谁是无赖……）

（注意并不是所有自指都是“恶性”的，例如，“我是我们中最高的一个”“这个房间里有50个人”等）

由此衍生出很多变体：

**“B是真的”（A）**

**“A是假的”（B）**

*（卡片悖论（Card paradox））*

这演变成了“真理论”（theory of truth）这一门哲学的分支；

自指的悖论还有很多，例如引言悖论；

Grelling–Nelson悖论（“短的”这个词是短的，它是描述自己的，它不是一个“异己”的词；“异己的”是异己的吗？）；Berry（用少于32个字符定义出了一个“最少要用32个字符才能定义”的词；可以利用这个悖论的想法给出一个哥德尔不完备性定理的简洁证明）；Richard；Burali-Forti（有所有序数的集合吗？）；Curry（一个句子X说得是“如果X，那么Y”，你可以推出任何Y： X := (X → Y), X → X, X → (X → Y), X → Y, X, Y）；

preface paradox：“我很仔细地检查过了每个句子并认为它们都是正确无误地。但还是这本书中任何错误都由我自己负责，而且我想这本书中至少有一个错误”；

这些自指性的悖论为“直谓数学”（predicative mathematics）的发展提供了动机。

蒯因（Quine）提供了一种非直接自指的方式：

"yields falsehood when preceded by its quotation" yields falsehood when preceded by its quotation.

很多悖论都涉及自指，有没有不涉及自指的严格意义上的悖论（它确实要是一个形式逻辑意义上的矛盾（  ），而不仅仅只是一个佯谬，或仅仅只是斗争（conflict），或与我们的日常直觉相冲突）呢？Yablo提供了一种可能性：

考虑以下无限的句子集：

S1：对于每个i>1，Si不是真的。

S2：对于每个i>2，Si不是真的。

S3: 对于每一个i>3，Si不是真的。

...

至于它到底涉不涉及自指？

Fitch悖论（Fitch’s Paradox of Knowability）：如果一切真的东西都是原则上可知的，那么一切真的东西就已经被知道了。

可以参考斯坦福哲学百科（Stanford encyclopedia of philosophy，SEP）的[相关条目](https://link.zhihu.com/?target=https%3A//plato.stanford.edu/entries/fitch-paradox/" \t "_blank)

* *谷堆悖论（The sorites paradox）*

一粒沙子不是沙堆；如果n粒沙子不是沙堆，那么加上1粒也不会变成“一堆”

什么时候沙子才变成沙堆？

其所涉及的“模糊性”（vagueness）是哲学中热门的话题之一，可以参考

[@罗心澄](https://www.zhihu.com/people/37e9938e5444bde972ff6db36be440b1)

 的[这个回答](https://www.zhihu.com/question/21988095/answer/19955004)

* Philosophy is better than nothing,

Nothing is better than money,

Philosophy is better than money.

* 蕴涵怪论（paradox of entailment）：错误蕴涵一切事情，这在逻辑中被称为*爆炸律（explosion）*，例如，如果2+2=5，那么月亮是绿色的/奶酪做的；或者，如果2+2=5，那么罗素是教皇。

不过我们倒不是不可以尝试做一个“证明”：

2+2=5,（前提）

2+2=4,（算术规则）

4=5,

4-3=5-3,

2=1,

罗素和教皇是2个人,

罗素和教皇是1个人.

不过这至少说明了加入了一些错误的前提后产生的“连锁反应”可能是难于预想的。

为了回应蕴涵怪论，模态逻辑（modal logic）、相干逻辑（Relevance logic）等各式逻辑被提了出来并得到了发展。

*What the Tortoise Said to Achilles*，Lewis Carroll于1895年在mind发表的一篇文章

例如，我们从A: "等于相同的东西彼此相等"(欧几里得关系)

B："这个三角形的两条边是等于相同的东西"

推出

Z："这个三角形的两条边彼此相等"

我们是凭借什么作出这样的推论的呢？是 *modus ponens （mp）*规则：如果我们有命题P蕴涵Q，并且我们有P，那么我们可以推论得到Q



可是我们在什么样的基础上得到这条规则（*C*: "如果A和B真的，Z一定是真的"，这里有一个蕴涵（implication）和推论（inference）的区别）的呢？

似乎我们的推论变成了，

A: "等于相同的事物相互之间是相等的"

B："这个三角形的两条边是等于相同的东西"

C："如果A和B是真的，Z一定是真的"

因此，Z："这个三角形的两条边彼此相等"

可是这样以来似乎又有一个假设，D："如果A、B和C都是真的，那么Z一定是真的"，依此类推，我们还能写出E……

最后，我们的推论似乎变成了这样的形式：

(1): "等同于相同的事物，相互之间是平等的"

(2): "这个三角形的两条边是等于相同的东西

(3): (1)和(2)⇒(Z)

(4): (1)和(2)和(3)⇒(Z)

...

(n): (1)和(2)和(3)和(4)和...和(n-1)⇒(Z)

因此，（Z）："这个三角形的两条边是互相相等的"

可是在每一个阶段，即使我们接受了所有已经写下的前提，还会有一个进一步的前提（如果（1）-（n）都是真的，那么（Z）一定是真的）

* *This is the old Platonic riddle of nonbeing. Nonbeing must in some sense be, otherwise what is it that there is not? This tangled doctrine might be nicknamed Plato's beard; historically it has proved tough, frequently dulling the edge of Occam's razor.*

*——Quine, on what there is*

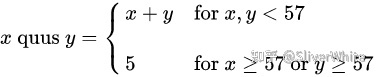
新归纳之谜（New riddle of induction）

继休谟。Nelson Goodman定义了一个谓词“grue”（和（绿的）“green”相对），它的意思是这样的，“一个物体是grue的，当且仅当，在某个固定的时间t之前观察它的话它是绿的，在那之后对它进行观察它是蓝的”。如果我们接受了归纳原则（The principle of induction）的话，从迄今为止检查的所有祖母绿宝石都是绿色的这一明显的有力证据中，人们可以归纳出，所有未来发现的，祖母绿宝石也都将是绿色的。然而，这一预测是否真的符合规律，取决于这一预测中使用的预测词。假设时刻t还没有过去，已经观察到的每一块绿宝石都是grue的，这同样是真的。因此，根据同样的证据，我们可以得出结论，所有未来的绿宝石都是grue的。

因此问题在于区分绿色和蓝色等这种可投射的（projectable）谓词与grue等这种不可投射的谓词。

类似的，在克里普克对维特根斯坦的解读（克里普克斯坦（kripkenstein））中，克里普克认为维特根斯坦的“私人语言”论证（private language argument）是提出了一种对意义的怀疑论：

当你觉得你以往想的是“加”（+）时，你怎么知道你想的其实是不是“quus”呢？“quus”定义如下：



还有意外考试悖论等，可以参考[这个回答](https://www.zhihu.com/question/52422433/answer/2276854982)2

文学中的如：

王尔德：“我的缺点就是我没有缺点。”；“第一：我永远是对的；第二：如果我错了，请参见第一条。”

等

第二十二条军规：疯子可以免于飞行，但同时又规定必须由本人提出申请，而如果本人一旦提出申请，便证明其并未变疯，因为“对自身安全表示关注，乃是头脑理性活动的结果”

Notes

1 对于堆垛悖论的谷堆和秃头情况有一个常见的误解：堆垛悖论的前提是不成立的，因为，是否构成谷堆和摆放的方式有关，100000 粒谷子平摊在地上，自然不构成谷堆，但是 100001 粒谷子堆起来就构成谷堆了呀喵~ ＞▽＜

因此，这里的「构成」，并不是指一种实际上的情况，而是指所有的情况：如果，n 粒谷子在所有可能的摆放情况下都不构成谷堆，那么 n+1 粒谷子在所有可能的摆放情况下也同样不构成谷堆。

为了方便，不如作出这样的限定：在堆垛悖论中，我们总是考虑一个特定的变化过程，比如说，一根一根地拔掉某个人的头发，一粒一粒地堆出一个谷堆……这样的一个变化过程是一个确定的变化过程，假设一个人有 n 根头发，那么就有



共 n+1 个确定的状态，并且，每两个状态都是如此相似，以至于我们无法区分这两个状态。

这一类论证的通用形式如下：

对于某个充分大的，我们有一列，我们考虑的属性是 P，并且对于这个属性，有如下两点成立：

* ，并且，
* 。（注意到，在有穷的情况下，一个全称语句可以视作若干个无量词句的合取。）

因此，。

但是显然，根据我们日常用语言的使用方式，



。

**解决尝试及其问题**

对于问题的处理，一共有三类：

1. 否定前提/否定推理
2. 否定翻译
3. 接受悖论

**1. 否定前提/否定推理**

**1.1 划界方案**

第一种解决方案是直接划定界线。这种方案在法律制定中最为常用，比如说，我国法律规定盗窃公私财物「数额较大」、「数额巨大」、「数额特别巨大」的标准分别为：

* 价值人民币 500 元至 2000 元以上的，为「数额较大」。
* 价值人民币 5000 元至 2 万元以上的，为「数额巨大」。
* 价值人民币 3 万元至 10 万元以上的，为「数额特别巨大」。

通过这种方式，将模糊谓词「数额较大」、「数额巨大」、「数额特别巨大」变成了精确谓词。进而，使得条件句



对于某个特定的 i 不成立，比如在这里「如果一个人盗窃财物数额特别巨大，那么再少一元也是特别巨大」在当前金额为三万整的时候就不再成立。

类似的情况还出现在对于

[可见光](https://link.zhihu.com/?target=http%3A//zh.wikipedia.org/zh-cn/%25E5%258F%25AF%25E8%25A7%2581%25E5%2585%2589)

的规定中：

* 紫色 668–789 THz 380–450 nm
* 靛色 631–668 THz 450–475 nm
* 蓝色 606–630 THz 476–495 nm
* 綠色 526–606 THz 495–570 nm
* 黃色 508–526 THz 570–590 nm
* 橙色 484–508 THz 590–620 nm
* 紅色 400–484 THz 620–750 nm

划界虽然可以解决问题，但是划界本身是**随意的**。以法律为例，不同国家的法律对于盗窃金额以及量刑等级的划分方式都有差异，这种差异不仅体现在具体界线的金额上，还是体现在界线的数量上。一个简单的划界并不具有说服力，而仅仅是一个出于实践的便利而采用的权宜之计。因此，我们可以进一步追问，为什么要划定这样的界线？是否存在非实践的理由驱使我们这样做？并且，由于人的认知精度有限，我们在特定情况下可能会问出这样的问题：「为什么明明 a 和 b 看不出差别，但是 a 具有 P 性质而 b 却没有？」在不回答这些问题之前，划界就不是一个好的方案，至少，不是一个完整的方案。以法律实践为例，即便我们假设法律本身是明确的，但是对于财产的价值估计在某种程度上依旧是任意的，这也就使得判决本身不可避免地带有运气的成分。以可见光为例，假设 100 次测量中，被测量单色光的波长有 49 次落在 590nm 以下，49 次落在 590nm 以上，2 次恰好为 590 nm，那么这束光是什么颜色的？而为什么，我们肉眼明明不能分别波长为 590.1nm 和 589.9nm 的光，但是它们却是不同颜色的？

当然，还有人以另外一个理由主张划界本身是困难的。考虑堆垛和秃头悖论，沙子和头发的排列方式会产生影响：再多的沙子，如果是均匀地铺成薄薄的一层，也不能被称为沙堆；一个人的头发如果像地中海那样少了一半（或者更多），那么显然被称为秃子不足为过，但是如果均匀地少了一半，又或者，均匀地每九根只剩下一根，则大部分人或许根本看不出来，或者，仅仅是觉得稀疏了一些，而不会将其称为秃子。不过，根据前面的预设，这个理由并不能够构成一个很好的理由。因为我们考虑的是一个具体的把人的头发一根根去掉的具体过程，期间任意一个状态



和它相邻的状态



都只相差一根头发。并且，如果认为



的情况下这个人是秃头，那么在



的情况下这个人也必定是秃头（因为多拔掉了一根头发），相对地，由于认知不可分辨的假设，我们会认为，如果在



的情况下这个人不是秃头，那么在



的情况下这个人也不是秃头。同理，对于沙堆，我们可以考虑按照某个不使得沙堆倒塌的特定顺序依次拿掉沙子的情况。

因此，对于划界方案的唯一有力反驳还是界线本身的合理性。

**1.2 认识论方案**

认识论方案是一个耐人寻味的方案。它是对划界方案的改进，认识论方案认为，虽然存在一条界线，但这条界线并不是人为划定的，并且，由于认知能力的限制，我们没有办法知道这条界线在哪里。因此，仅仅是我们自己以为「对于任意的



」都是如此，但是实际上存在某个特定的 j，使得



和



有本质区别。

对于认识论方案有两种不同的理解：

* 对象的性质在某个地方发生了本体论意义上根本性的转变，但是由于认知精度的限制，我们无法认识到这种区别。
* 并不是每个增加一点点或者减少一点点的过程都是不可察觉的，存在这样的较为明显的分界点，但是由于可能的情况种类数目太多，我们无法逐一设想出每一种情况，进而即便有小的跳跃或者是突变，我们也无法察觉。

第一种情况似乎是常见的情况。至少对于光线来说，人由于自身的视觉精度限制，无法区分两种波长过于靠近的光。因此，认识不到界线似乎有可能就是因为人类自身能力识别精度不足导致的。当我们将大多数具体的论证列出来的时候似乎也是如此：

* 由于我们没有办法分辨多一粒沙和少一粒沙的沙堆，所以我们认为它们要么都是沙堆，要么都不是。
* 由于我们没有办法分辨多一根头发和少一根头发的人，所以我们认为他们要么都是秃子，要么都不是。
* 由于我们没有办法分辨两个身高相差1nm 的人，所以我们认为他们具有完全相同的身高。

但是，以上论证都是基于同一个理由：如果 a 和 b 在我们所要考察的方面相似，那么如果 a 具有我们所要考察的性质 P，那么 b 也具有性质 P。

事实上这种替换的问题在于将相似（认知不可分辨）以某种方式和同一性等同起来，但是，相似性虽然具有自反性和对称性，却没有传递性。因此，认知不可分辨不能作为事实上对应性质完全相同的理由，进而，如果仅仅是以相似性作为理由，那么对于任意的 i，我们都推不出



。

然而，采用第一种观点的前提是承认本体论意义上的边界是存在并且明确的。但是，如果我们考虑到实际上这些概念是人脑创造出来的概念，那么我们就很难将这些概念的本体论层面和认识论层面区分开来。进而，上面支持认识论方案的理由就会变成反对认识论方案的理由：我们使用「红」、「大」、「秃顶」、「高」这些词汇的时候，本来就是在模糊的意义上使用的，换而言之，这种模糊是本体论意义上的，而不仅仅是认识论意义上的。

同时，我们似乎还会面临另一个问题，就是我们的词语同时有两个方面，一方面是一个二分性的「是」或者「不是」。而另一方面，我们的词语内部还有程度的区别，即「富有」可以分为「小康」，「富裕」，「富豪」，「富可敌国」不同的等级。这种困难就像是「不是论证的语句」和「坏的论证」之间的关系那样，在某种程度上是纠缠不清的。

当然，这种论证方式对于另一些概念是不成立的，比如说我们可以具体指出一个人拥有多少钱，这种情况下，无论差异多么细小，比如说相差 0.01 元的情况，我们也可以分辨出一个人「拥有 1000000 元」和「拥有 1000000.01 元」是不同的。从这个意义上来说，我们可以将堆垛悖论分为两类。当然，如果我们的确用语言去叙述，而不是去看一系列的一个人变成秃头的过程，那么似乎对于秃头悖论，我们也可以非常明确地区分这个人的两个状态。从这个意义上来说，这种不协调性实际上是概念和认知之间的不协调性，或者说，概念和印象之间的不协调性。

**1.3 多值逻辑方案**

基于前面对于程度的考虑，产生悖论的一个可能的原因是没有区分概念内部的不同程度，这种对于程度的不敏感最终导致了一个对象逐步演变为另一个和自身相去甚远的对象，进而引起荒谬感。另一方面，以沙堆为例，或许4 粒沙子构成的正四面体构型沙堆就已经可以称为沙堆，仅仅是因为它非常小而已，所以事实上堆垛悖论本质上是关于堆垛的大小而不是关于是不是堆垛的讨论，但是如果我们能够成功地刻画堆垛的大小程度，那么悖论也就可以被解决了。

考虑多值逻辑的另一个理由是，一个群体中总有一部分对象不能被划归到两个极端中，总有一些「中等」或者说「不确定」的情况，这种情况的存在使得我们似乎既不能断定 P(a)，也不能断定 -P(a)。（在非数学环境下，命题前面的「-」表示否定）

基于后一种理由，我们可以考虑符合直观的三值逻辑，即承认一种情况，使得在这种情况下 P(a) 的值既不真也不假。而由于中间某个条件句前件为真而后件不确定或者前件不确定而后件为假，所以我们认为这个条件句的赋值也是不确定而不是真，进而，否定了前提。

类似地，多值逻辑还可以用来表示一个命题成立的「程度」，比如说，如果 X 有一百万，那么他就是百万富翁级的富有，而如果他有 1000 万，那么他就是千万富翁级的富有，进而 Rich(X) 在两种情况下取值不同。

但是，对于前面三值逻辑的运算规则，有一个非常不直观的地方，就是如果p 的取值是不确定，那么-p 的取值也是不确定，而由于逻辑的真值函项性，



的取值也只能是不确定，这样就否定了排中律。

同时，对于取有穷多个值的多值逻辑，由于取值必然是离散的，也就使得不同的程度之间有一个飞跃，也即划定了不同程度之间的界线，进而就会产生疑问：「为什么 a 和 b 那么相似，却被分入不同类别中，而 a 和 c 的差别如此大却被分入同一个类别中？」

这种质疑本质上和对于划界方案的质疑是一样的。并且，和三值逻辑中第三值「不确定」有着直观解释不同，离散的多值逻辑的运算规则会更加不直观，并且，似乎也没有办法很好地解决排中律不成立的问题。

**1.4 模糊逻辑方案**

多值逻辑的极致则是采取某种稠密甚至连续的取值，可以引入模糊逻辑中的模糊集和隶属度的概念。通过连续赋值，可以解决多值逻辑中离散量分类产生的不连续的飞跃。但是，模糊逻辑并不能解决排中律不成立的问题。并且，模糊逻辑的演算规则同样非常不直观。

虽然从直观上来看，模糊逻辑应该满足如下运算规则：

* .
* .
* .

但是，如果我们假定 A 的头发严格比 B 多。(p)「A 为秃头」的真值为 0.6，(q)「B 为秃头」的真值为 0.7，那么直觉上



的真值至少应该很高。但是如果我们认为



等值于



，那么，这一句几乎必然真的句子的真值却只有0.7。（貌似这个例子不是很好，不过，如果分别是 0.45 和 0.55 的话，那么这个蕴含句的真值就只有 0.55，0.4 和 0.6 的情况下也仅有 0.6。）

个人认为，上面那个反驳本质上和排中律的问题是一样的，因为无论我们对 p、q 怎么赋值，只要V(p) > V(q)，那么V (



) 就大于 0.5。如果将这里的模糊值理解为正确的概率，那么就可以接受了。而当 V(p) 和 V(q) 的差值一定的时候，它们的取值越是倾向两边，则越



的值越大（趋近于1）。这是因为，越是趋于中间，则体现出我们的判断越不确定，进而，出错的可能性越大。但是如果我们认定了V (p) > V (q)，那么对



判断出错的可能性还是低于 0.5。但是无论如何，这种解释的说服力不够，并且，当我们考虑模糊逻辑本身的发展历程的时候，就会发现模糊逻辑本身作为解释而言常常是不好的（由于反直观地不承认排中律），它的价值大多在应用上。

**1.5 群体判断方案**

在前面的判断中，我们都假设这个判断是由一个人进行的，但是如果我们假定一个群体中的每个个体都有一个清晰的界线，那么我们可以通过将群体中的个体的界线综合起来，得到一个模糊函数。但是这种方案的问题在于，很多情况下对于每个个体来说，清晰的界线也是不存在的，甚至，一个一致的界线都是不存在的。因此，「让每个人做出判断”这一步甚至都可能无法完成，那么后面的“合理地将个人判断汇总起来」也就是空谈了。

这种方案想做的事情本质上和模糊逻辑方案是一致的，仅仅是为解决一个集体中个体对象的语言不能统一所采用的方法，但是这种方法并不能够解决个体的语言本身的问题。

**1.6 超赋值方案**

超赋值方案是在经典逻辑的基础上引入一个新的概念——超级真。

我们说一个命题是超级真的（



），如果对于任意划界下的赋值



，



，其中At 为原子命题集合，E 是一个划界集合。类似地可以定义超级假的概念：如果一个命题是超级假的，那么对于任意的赋值它都为假。而剩下的那些命题，我们说它们的真值是未定义的。

而通过将推理有效性的「保真」重新定义为「保超级真」，原来的论证是无效的，因为它不保超级真。又或者认为，这些论证的部分前提在某些划界标准下为真，而在另一些下面为假，因而是真值不定的。

从结果上来看，超赋值方案否认作为归纳步骤的前提，也即，否认



。但是，如果这句话翻译为「存在j，使得



成立而



不成立」，那么这就是认为边界存在。

但是认为边界存在就会面临前面对于划界问题的质疑。而如果要避免这种质疑，就只能认为边界不存在，也即，接受一个存在命题，但却拒绝接受这个存在命题的任何代入特例。这显然是不直观的。

**1.7 反对 cut 规则**

经典逻辑中实际上有一条用于将短论证组合成长论证的规则。这条规则如下：

如果，，那么。

当然，对于不同强度的 cut 规则，作为中间项的可以不是一个命题，而是一个命题集合。

一个反对三值逻辑的理由是，三值逻辑加入不确定之后，没有办法很好地区分以下两个条件句：

* 如果 A 是秃头，那么他再多掉一根头发也是秃头。
* 如果 A 是秃头，那么他再多一根头发也是秃头。

但是，如果我们认为，实际上的推理模式并不是上面那样基于语句的模式，而是基于认知的模式——「由于我们无法分辨两个相邻的状态



和



，因此我们认为



」，那么，我们就并不是在通过单纯的对于对象的语言描述来进行推理：虽然我们知道「如果 A 是秃头，那么他再多掉一根头发也是秃头」，但是对于呈现在我们面前的两个状态a、a' 来说，我们根本就不知道哪个是



，哪个是



。因此，我们没有办法采用这种推理模式。（事实上，如果我们有能力分辨 a 和 a'，那么条件句是否成立就不是那么显然的了。）此外，另一个辅佐相似性可以反驳简单逻辑推理的事例是，如果我们的推理模式中包含「如果 A 是沙堆，那么 A 再多 n 颗沙子也是沙堆」的推理模式，那么我们就无法理解为什么我们会把游泳池中的一个小沙堆称为沙堆，而不把填满游泳池的沙称为沙堆了。（注意到这里后者实际上是前者的一个严格扩充，是在没有改变前者的排列方式的情况下完成的，所以不存在改变排列的问题。）于是事实上我们赖以推理的模式还是相似性而不是单纯的数量关系。

认知不可分辨不是等价关系，因此，虽然我们有和，但是我们未必会有，进而，无法使用前提来得到 c 和 a 具有相同的性质。

但是，由于我们分别能够得到结论以及，根据 biconsitional 算子的传递性以及组合论证的 cut 规则，我们能进一步得到。但是这合理么？我们得到前面的结论，是因为我们处在只考虑 a 和 b 的状态中，这时，我们不能分辨他们两个。而我们得到后面的结论，则是因为我们处在只考虑 b 和 c 的情况下。但是我们的认知精度却有可能让我们分辨 a 和 c。将两个论证结合起来用到了cut 规则，而在这种情况下，使用 cut 规则是显然不合理的：我们不能将两个不同语境中的论证的结论结合起来。

考虑这个论证：波长为 440nm 的光和波长为 442nm 的光颜色相同，波长为 444nm 的光和波长为 442nm 的光颜色相同。因此，波长为 440nm 的光和波长为 444nm 的光颜色相同。但事实上我们是能够分辨这两者的。或者，将前面的谓词视为「和波长为 442nm 的光颜色相同」，这样，我们就有「A、B都和波长为 442nm 的光颜色相同」，但是「A、B颜色不同」的结论。进一步，我们或许可以得到一个新的反直觉的规则：就算 a、c 分别和 b 在是否拥有 P 性上是同一的，但是由于这是基于各自语境的，所以我们不能认为 a、c 在是否拥有 P 性上是同一的。因为后面这个命题是一个应用了跨语境的 cut 规则的论证的推论。（这个推理有如下假定：人类能分辨波长差大于 3nm 的单色光，而不能分辨波长差小于3nm 的单色光。注意到这个地方的数值并不重要，只是为了举例。）

如果我们在这里否定了 cut 规则，我们就要问，在什么情况下我们应该否定 cut 规则，或者，在什么情况下使用 cut 规则是合适的？显然，在跨语境的情况下使用 cut 规则是有风险的。而在保持语境单一的情况下（比如单一的数学语境中），使用 cut 规则就是安全的。但是进一步产生的问题是，如果我们否认日常语境中的 cut 规则，那是否意味着任何时候我们在日常生活中都不能进行长推理呢？如果不是，什么情况下日常生活中的语境是对 cut 规则安全的呢？

原本我想到了一个技术性的答案，不过我现在考虑了另一个情况，就是，凡是涉及人类认知的语句，当我们进行长推理的时候都必须慎重，因为人类的知觉是不一致的，或者说，不协调的。比如说：我们对比下午两点和下午四点时同一个对象的影子，可以发现影子长度有一个明显的变化，但是我们如果盯着影子看，会感觉到「影子是不动的」。这个时候，虽然我们可以通过实际情况来修正我们的经验，但是我们依旧无法排除「影子是不动的」这个初始的经验判断。类似的情况还包括对于大多数连续细微变化的判断。但是，我们日常语言中包含了许许多多这类描述我们直接认知经验的语句，我们不可能排除这些语句，而只可能在觉察到异样的时候，回过头反省自己得到某个悖论的过程是否引入了一种跨语境的长推理。

**2 否认翻译的理想语言方案**

Russell 和 Frege 会认为，产生这个悖论是因为我们的自然语言有严重的缺陷。我们需要理想语言而不是自然语言。

事实上，对于不确定陈述，除了可以认为是语句本身的真值不确定，也可以认为是需要在在两个极端之间插入第三个摹状词，比如说「不高不矮」、「不胖不瘦」、「不贫穷也不富有」、「不红不黄」……

当然，正如前面的三值逻辑那样，如果仅仅是添加谓词，只要谓词是有穷多个，那么不同的谓词之间的差别就依然存在。但是，如果我们采用连续的谓词，或者，采用一个以实数（事实上有理数就足够了）作为第二个变元的二元谓词呢？

在这种情况下，我们并不将模糊性处理为原子命题真值的取值，而将其处理为另一种形式。以光线为例，我们并不说 Red(a)，而说 Red(a,0.7)。也即，将模糊性放在谓词上而不是命题上。同时，如果



，那么



。

但是这种处理方式有一个问题：

如果我们进行划界，比如，认为



使得



，那么就会产生和划界问题完全一样的后果。而如果我们不这样处理，那么实际上我们就是彻底否定了「红」这个谓词，而将它拆分成了连续的不同程度的红。或者说，仅仅是不同名称的色块，而不能告诉我们到底哪一块是日常语言意义上的红，而哪一块不是。但是，这种拆分是有意义的，至少从 trope 理论的角度上来说是这样。

此外，考虑到仪器必然会有精度限制，精确语言方案实际上是无法实行的：由于我们不可能找到没有误差的仪器，所以我们永远不能根据数值判断一个数值在边界上的对象到底属于哪一边，并且我们不能简单地接受这个对象属于某一边，因为如果下一次它被检测出属于另一边的话，那么它就同时具有 P 和非 P 两种性质，而这显然是矛盾的。并且物理学的结果告诉我们，这种检测错误是不可避免的。这就和前面划界方案面临的问题类似。

另一种精确语言方案支持 trope 理论，对于每一个



，我们设计一个专门的谓词



来表达

的P 性。但是如果我们采用这种方案，就会和上面一样丧失原本使用 P 这个谓词所要表达的概括性的作用。然而，这种方案可以视作一种对于语言的规范性重建，并且在事实上比前面的方案更为合适。

**3 从[语境主义](https://www.zhihu.com/search?q=%E8%AF%AD%E5%A2%83%E4%B8%BB%E4%B9%89&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A19955004%7D" \t "_blank)的角度上接受悖论**

接受结论就是按照字面上的意思：接受悖论。但是如果我们同时接受



和



，那么我们的信念显然就是不一致的。因此，逻辑的规范性我们不应该接受悖论。而这个悖论本身的结构就保证了它在两个方向上都是成立的，因为如下两个命题是等价的：

* .
* .

也即，从一个方向上，我们会得到所有人都是秃头，而从另一个方向上我们会得到秃头不存在。

另一方面，以秃头悖论为例，如果我们真的考虑一个人一根头发都没有的情况，那么就不会说「如果他有一根头发不算秃头，那么就算他一根头发都没有也不算秃头」，而至少会出于情理说：「就算他有一根头发的时候不是秃头，当他一根头发都没有的时候也应该是秃头了」。

或者，考虑这样的情况：大多数情况下，我们不会把一个堆成正四面体状的四个等大球状沙粒称为沙堆，但是我们会说：「即便这种情况下四个依然构成沙堆，但是去掉一个也就无论如何都称不上堆了 」。又或者，考虑两个和一个的情况，「沙堆至少是复数个沙粒吧，两个怎么能称为沙堆呢？」虽然实际上我们不会认为两粒沙子和一粒沙子会构成沙堆，但是在特定的情况下，我们认为这构成了某种必要条件。因此，这可以视作不存在一个大边界，而仅仅存在一些特定的情况下存在一系列的小边界。因此语境主义的另一个方向是为超赋值方案提供辩护：我们有一个作为整体的边界，这个边界并不存在于任何两个对象之间，而是在不同的语境下出现在不同的位置上。

个人认为在特定语境下接受悖论是没问题的，但是一般来说并不是接受对于头尾两项的悖论，而是接受关于某个中间的项的悖论。根据语境主义解释，当我们说一个对象既可以视作 P 也可以视作非 P 的时候，是由于我们的语境不同，并且，永远都不是同时视作 P 且非 P，因此，这也并不构成矛盾——在每个将其视作 P 或者非 P 的语境中，我们都是一致的。而当我们转换语境的时候，实际上我们转换了头脑中的整套概念。就像是 Gestalt 图中，假设我们有一连串的从鸭子变成兔子的图片，那么对于正中间的那个图片，我们将其视作鸭子还是兔子，完全取决于我们是从鸭子开始看的，还是从兔子开始看的。甚至有可能，看到最后，我们会把鸭子的抽象画看成兔子，而将兔子的抽象画看成鸭子。这也不是不可能的。当然，我们不可能把实际上的兔子看成鸭子，也不可能把实际上的鸭子看成兔子。

**结论**

堆垛悖论不是一个悖论，而是一组悖论。在不同的情况下，导致悖论的原因是不同的，进而，解决悖论的方案也是不同的。在这里我考虑三个思路。

1. 条件句成立的前提为两个状态的差别非常小，以至于认知不可分辨，并且假设对于所有的 i ，。但是认知不可分辨是语境依赖的，虽然在一个小范围内的对象是认知不可分辨的，但是通过 cut 规则进行推理会导致论域扩大，进而甚至包括两个认知可分辨的对象，从而导致矛盾。因此我们应该拒绝跨语境的 cut 规则。
2. 针对认知可分辨的情况，拒绝接受前提中对应的条件句。根据超赋值方案，我们的理解可以是：每一个条件句都是真的，但是其中有很多不是超级真的。从某种角度上来说，接受界线的存在也不是不可以的，当然更好的理解方式是认为，界线被「稀释」成了一个一个的子界线，其中作为每个子界线的命题的可接受度都不为 1。但是引入可接受度就会导致排中律失效。因此讨论必须以另一套语词进行。
3. 考虑语境，我们可以认为处于中间位置的元素同时具有两种属性，但却并不构成矛盾。而这一种思想推广到极致就是在特定的语境下接受结论。但是认为由于结论成立的语境不同，所以不构成矛盾。从形式上来说，并不是 F(a) 和 -F(a)，而是 F(a,c) 和- F(a,c')。另一方面，也可以视作处于中间位置的元素同时具有两种属性。

2我介绍一篇论文：The Surprise Examination Paradox and the Second Incompleteness Theorem, Shira Kritchman, 2010, Notices of the American Mathematical Society

这篇论文提出了一个第二哥德尔不完备性定理[[1]](https://www.zhihu.com/question/52422433/answer/2276854982" \l "ref_1)（第一不完备性定理可[[2]](https://www.zhihu.com/question/52422433/answer/2276854982" \l "ref_2)以是Chaitin不完备定理和Berry paradox的一个推论）的新证明：

令T是一个一致的足够丰富的数学理论（例如ZFC，如果它是一致的话），根据Chaitin不完备定理，对于任何整数  ，“  ”，其中  为柯尔莫洛夫复杂度[[3]](https://www.zhihu.com/question/52422433/answer/2276854982#ref_3)，都不能在T中被证明。不过，注意到对于那些有  的整数  ，“  ”都可以被证明。只要把那个长度最多为L的输出x然后停止的程序给出来。

令  使得  ，令m为这样的x的数目（m就可以类比作意外考试悖论中的考试的那一天）。因为长度为  的程序的数目最多只有  个，所以这样的  一定存在，换言之，  。

假设m=1，我们可以通过证明其它所有整数y都有  （我们前面已经说明，如果  我们就能证明把它出来）证明  。而这与我们原先的说法矛盾，因此如果T一致，  。

用反证法，假设T可证T一致。因此我们就能在T中证明“”。同理用数学归纳法我们可以对每个  都证明出  。而这与  相矛盾。因此T不可证其自身的一致性。

而对于意外考试悖论，一个类比式的想法大致是，学生在作推理时预设了系统能证明自身的一致性，而这一点是系统本身不能保证的，因此学生的推理失效了。

**参考**

1. [**^**](https://www.zhihu.com/question/52422433/answer/2276854982#ref_1_0)任何包含算术的一致的系统都不能证明自身的一致性
2. [**^**](https://www.zhihu.com/question/52422433/answer/2276854982#ref_2_0)任何一个包含算术的一致的递归可公理化的形式系统中都存在一个语句，其既不可被证明也不可被证否
3. [**^**](https://www.zhihu.com/question/52422433/answer/2276854982#ref_3_0)一个整数x的Kolmogorov复杂性K(x)被定义为输出x（并停止）的最短程序的比特长度。为了定义K(x)，我们必须确定一种编程语言，如LISP、Pascal等。

Reference

Wiki